

# Introduzione alla Programmazione Lineare Inter

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa  
mauro.passacantando@unipi.it

Corso di Ricerca Operativa A  
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2018/19

## Relazioni tra PLI e PL

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare Intera nella forma

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \quad (P)$$

dove i dati  $A, b, c$  sono a componenti intere e la regione ammissibile  $\Omega$  è limitata.

### Teorema

Il problema (P) è NP-hard.

## Relazioni tra PLI e PL

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare Intera nella forma

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \quad (P)$$

dove i dati  $A, b, c$  sono a componenti intere e la regione ammissibile  $\Omega$  è limitata.

### Teorema

Il problema (P) è *NP*-hard.

### Definizione

Il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ & Ax \leq b \end{cases} \quad (RC)$$

è detto rilassamento continuo di (P).

## Relazioni tra PLI e PL

Che relazione c'è tra (P) e (RC)?

### Teorema

- ▶ Il valore ottimo di (RC) è maggiore o uguale del valore ottimo di (P).

## Relazioni tra PLI e PL

Che relazione c'è tra (P) e (RC)?

### Teorema

- ▶ Il valore ottimo di (RC) è **maggiore o uguale** del valore ottimo di (P).
- ▶ Se la **soluzione ottima di (RC) è ammissibile per (P)**, allora **è ottima** anche per (P).

## Relazioni tra PLI e PL

Che relazione c'è tra (P) e (RC)?

### Teorema

- ▶ Il valore ottimo di (RC) è **maggiore o uguale** del valore ottimo di (P).
- ▶ Se la soluzione ottima di (RC) è ammissibile per (P), allora è ottima anche per (P).

**Spesso** la soluzione ottima di (RC) **non è ammissibile** per (P)...

## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata?

## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? **NO**

### Esempio

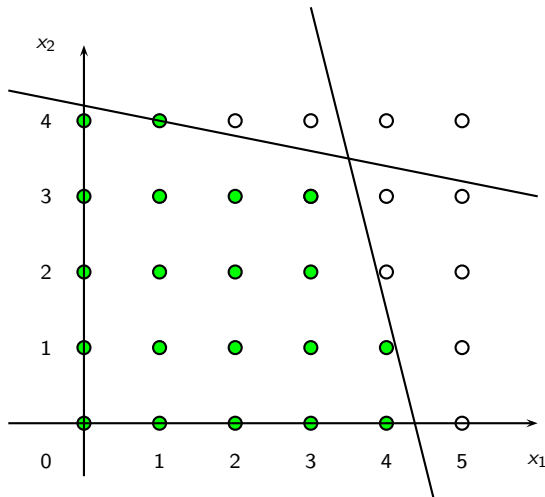
$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{array} \right.$$

## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

### Esempio

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$



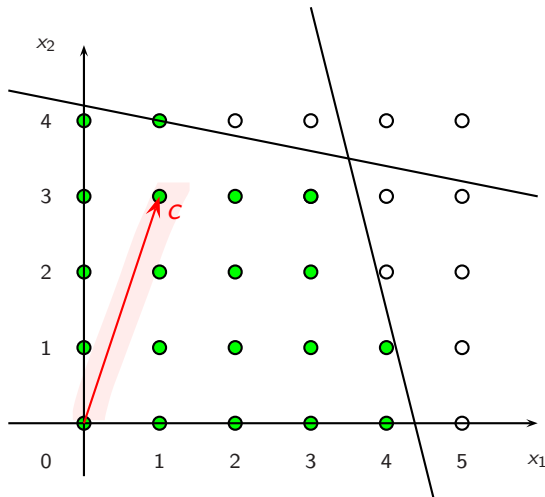
## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

### Esempio

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

Vettore  $c$

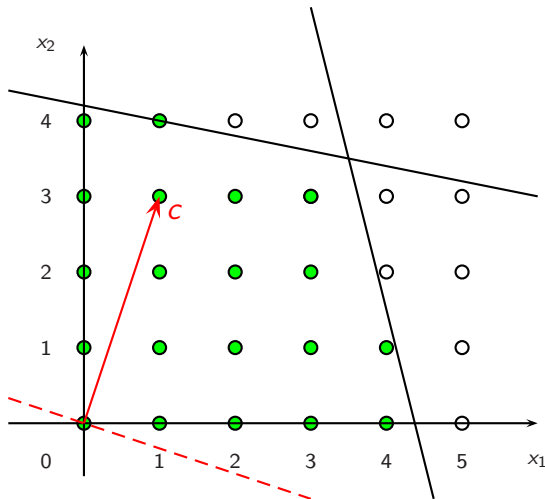


## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

### Esempio

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

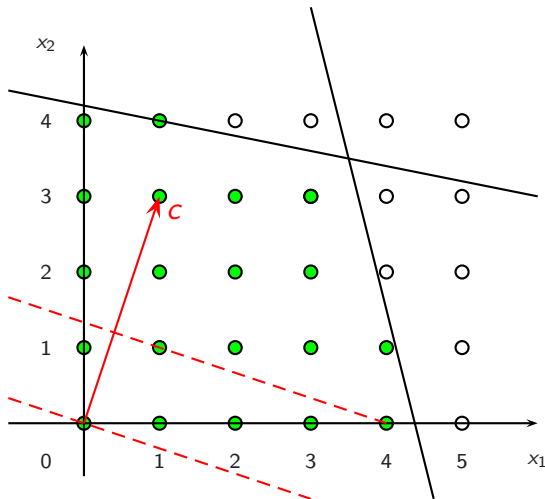


## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

### Esempio

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

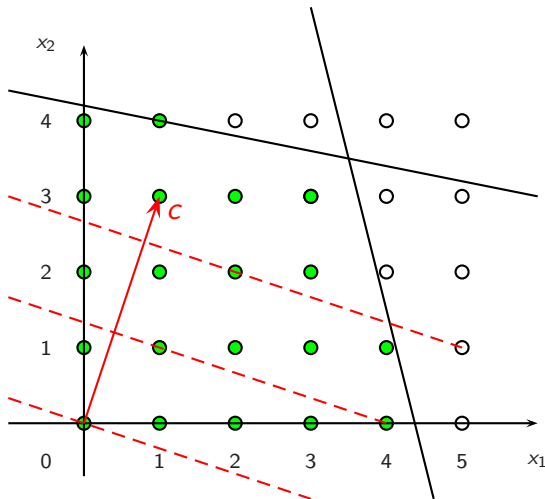


## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

### Esempio

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

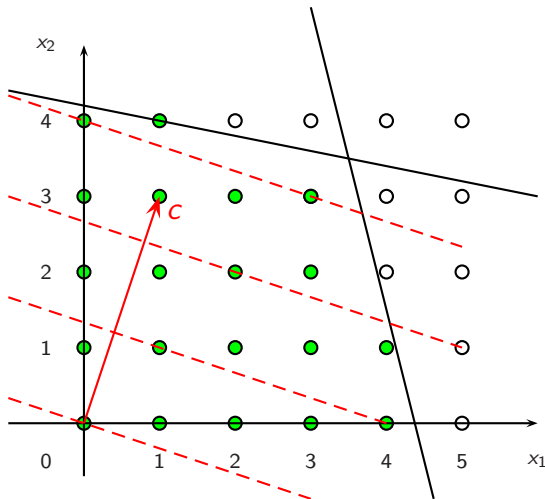


## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

### Esempio

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$



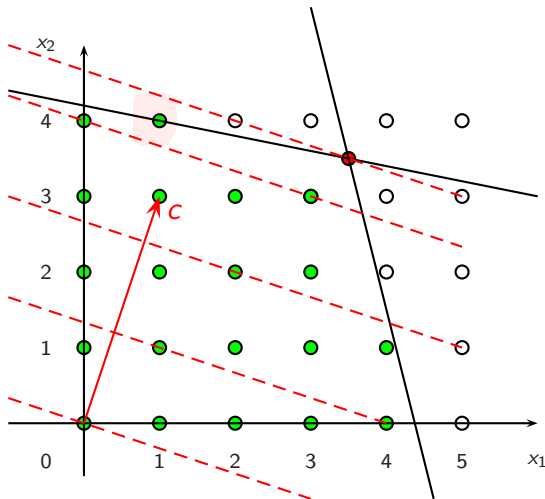
## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

### Esempio

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ ottimo rilas. continuo}$$



## Relazioni tra PLI e PL

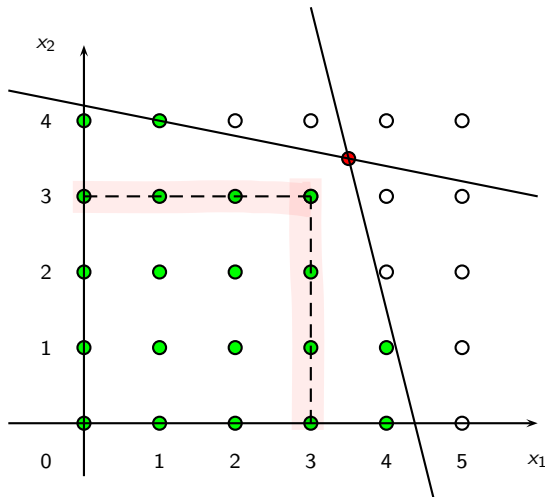
Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

### Esempio

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$  ottimo rilas. continuo

arrotondamento  $\rightarrow (3, 3)$



## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

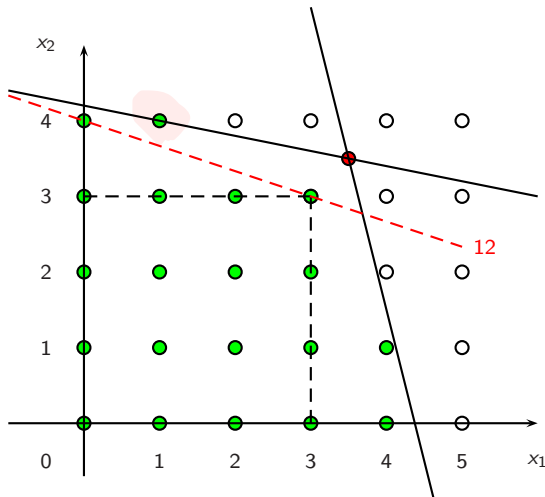
### Esempio

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$  ottimo rilas. continuo

arrotondamento  $\rightarrow (3, 3)$

**$(3, 3)$  non è ottima**



## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

## Esempio

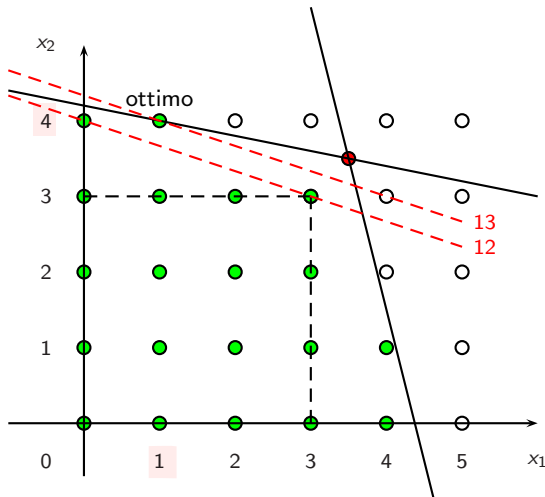
$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$  ottimo rilas. continuo

arrotondamento  $\rightarrow (3, 3)$

$(3, 3)$  non è ottima

la sol. ottima è  $(1, 4)$



## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e scegliere la soluzione ammissibile più vicina rispetto alla distanza euclidea?

## Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e scegliere la soluzione ammissibile più vicina rispetto alla **distanza euclidea?** NO

### Esempio

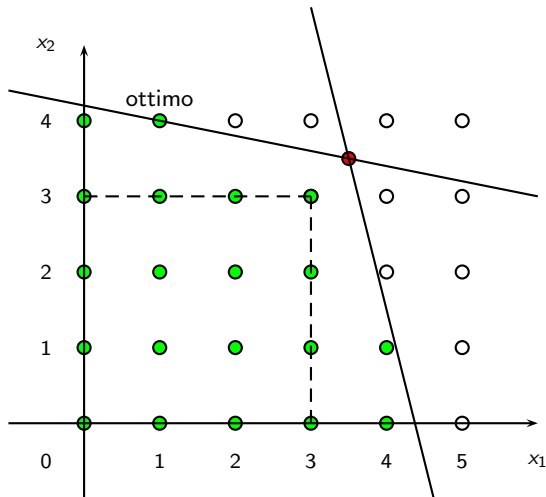
$$\begin{cases} \max x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ ottimo ril. cont.}$$

sol. più vicina è (3,3)

ma (3,3) non è ottima

la sol. ottima è (1,4)



## Relazioni tra PLI e PL

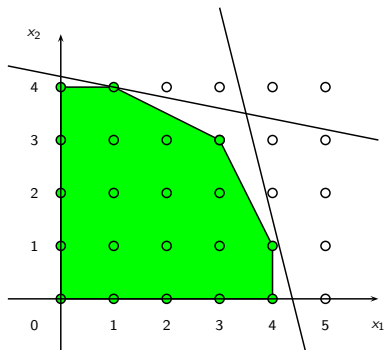
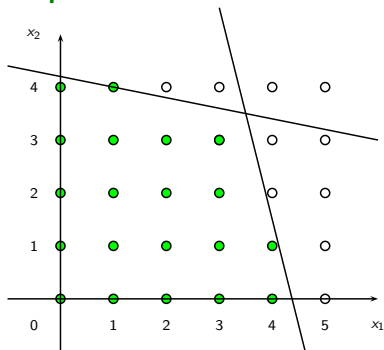
Consideriamo i problemi:

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

dove  $\text{conv}(\Omega)$  è l'involucro convesso delle soluzioni ammissibili, cioè il più piccolo insieme convesso che contiene  $\Omega$ .

### Esempio



## Relazioni tra PLI e PL

### Teorema

- ▶  $\text{conv}(\Omega)$  è un poliedro

## Relazioni tra PLI e PL

### Teorema

- ▶  $\text{conv}(\Omega)$  è un poliedro
- ▶ I vertici di  $\text{conv}(\Omega)$  appartengono a  $\Omega$

## Relazioni tra PLI e PL

### Teorema

- ▶  $\text{conv}(\Omega)$  è un poliedro
- ▶ I vertici di  $\text{conv}(\Omega)$  appartengono a  $\Omega$
- ▶ I problemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \max c^T x \\ x \in \Omega \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \max c^T x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{array} \right.$$

hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

## Relazioni tra PLI e PL

### Teorema

- ▶  $\text{conv}(\Omega)$  è un poliedro
- ▶ I vertici di  $\text{conv}(\Omega)$  appartengono a  $\Omega$
- ▶ I problemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \max c^T x \\ x \in \Omega \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \max c^T x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{array} \right.$$

hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

### Corollario

Il problema di PLI

$$\max_{x \in \Omega} c^T x$$

è equivalente al problema di PL

$$\max_{x \in \text{conv}(\Omega)} c^T x$$

## Relazioni tra PLI e PL

### Teorema

- ▶  $\text{conv}(\Omega)$  è un poliedro
- ▶ I vertici di  $\text{conv}(\Omega)$  appartengono a  $\Omega$
- ▶ I problemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \max c^T x \\ x \in \Omega \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \max c^T x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{array} \right.$$

hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

### Corollario

Il problema di PLI

$$\max_{x \in \Omega} c^T x$$

è equivalente al problema di PL

$$\max_{x \in \text{conv}(\Omega)} c^T x$$

In generale è **difficile** trovare i vincoli che definiscono  $\text{conv}(\Omega)$  ...

## Matrici totalmente unimodulari

Per alcuni particolari problemi si riesce a caratterizzare  $\text{conv}(\Omega)$ .

### Teorema

Sia  $\Omega = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b\}$ . Se  $A$  è una matrice **totalmente unimodulare** (cioè il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata è 0 oppure 1 oppure  $-1$ ), allora

$$\text{conv}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

cioè  $\text{conv}(\Omega)$  coincide con la regione ammissibile del rilassamento continuo.

## Matrici totalmente unimodulari

Per alcuni particolari problemi si riesce a caratterizzare  $\text{conv}(\Omega)$ .

### Teorema

Sia  $\Omega = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b\}$ . Se  $A$  è una matrice **totalmente unimodulare** (cioè il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata è 0 oppure 1 oppure  $-1$ ), allora

$$\text{conv}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

cioè  $\text{conv}(\Omega)$  coincide con la regione ammissibile del rilassamento continuo.

### Esempi

In un **problema di flusso di costo minimo** con variabili intere:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ 0 \leq x \leq u \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

la **matrice dei vincoli è totalmente unimodulare**. Quindi **per risolverlo basta trovare un vertice ottimo del suo rilassamento continuo**.

Lo stesso vale per il problema del cammino minimo.

## Disuguaglianze valide e piani di taglio

In generale è difficile caratterizzare  $\text{conv}(\Omega)$ .

Si aggiungono vincoli alla regione ammissibile del rilassamento continuo in modo da approssimare  $\text{conv}(\Omega)$ .

### Definizioni

La disequazione  $p^T x \leq p_0$  è detta **disuguaglianza valida** (DV) per l'insieme  $\Omega$  se

$$p^T x \leq p_0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Un **piano di taglio** è una disuguaglianza valida  $p^T x \leq p_0$  per  $\Omega$  tale che  $p^T \bar{x} > p_0$ , dove  $\bar{x}$  è l'ottimo del rilassamento continuo.

## Disuguaglianze valide e piani di taglio

In generale è difficile caratterizzare  $\text{conv}(\Omega)$ .

Si aggiungono vincoli alla regione ammissibile del rilassamento continuo in modo da approssimare  $\text{conv}(\Omega)$ .

### Definizioni

La disequazione  $p^T x \leq p_0$  è detta **disuguaglianza valida** (DV) per l'insieme  $\Omega$  se

$$p^T x \leq p_0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Un **piano di taglio** è una disuguaglianza valida  $p^T x \leq p_0$  per  $\Omega$  tale che  $p^T \bar{x} > p_0$ , dove  $\bar{x}$  è l'ottimo del rilassamento continuo.

Idea alla base del metodo dei piani di taglio:

se  $P$  è la regione ammissibile del rilassamento continuo e la soluzione ottima  $\bar{x}$  di  $\max_{x \in P} c^T x$  appartiene ad  $\Omega$ , allora  $\bar{x}$  è ottima anche per  $\max_{x \in \Omega} c^T x$ ;

altrimenti si costruisce un piano di taglio  $p^T x \leq p_0$  in modo da tagliare fuori  $\bar{x}$  e poi risolvere il nuovo problema di PL:

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in P \\ p^T x \leq p_0 \end{cases}$$

## Piani di taglio di Gomory

Supponiamo che il problema di PLI sia nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right. \quad (P)$$

e che  $B$  sia una base ottima del rilassamento continuo di (P). Poniamo:

$$A = (A_B \ A_N) \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \bar{x}_B \quad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N$$

La parte frazionaria di un numero reale  $z$  è  $\{z\} := z - \lfloor z \rfloor$

## Piani di taglio di Gomory

Supponiamo che il problema di PLI sia nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right. \quad (P)$$

e che  $B$  sia una base ottima del rilassamento continuo di (P). Poniamo:

$$A = (A_B \ A_N) \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \bar{x}_B \quad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N$$

La parte frazionaria di un numero reale  $z$  è  $\{z\} := z - \lfloor z \rfloor$

### Teorema

Se esiste  $r \in B$  tale che  $\tilde{b}_r \notin \mathbb{Z}$ , allora

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{\tilde{b}_r\}$$

è un piano di taglio di Gomory per il problema (P).

## Piani di taglio di Gomory

### Dimostrazione

Fissiamo  $x \in \Omega$ . Allora

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b,$$

quindi

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N = \tilde{b} - \tilde{A} x_N.$$

Definiamo il vettore  $\tilde{x} = x_B$ . Quindi:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_r &= \tilde{b}_r - \sum_{j \in N} \tilde{a}_{rj} x_j \\ &= \lfloor \tilde{b}_r \rfloor + \{\tilde{b}_r\} - \sum_{j \in N} (\lfloor \tilde{a}_{rj} \rfloor + \{\tilde{a}_{rj}\}) x_j \\ &= \lfloor \tilde{b}_r \rfloor + \{\tilde{b}_r\} - \sum_{j \in N} \lfloor \tilde{a}_{rj} \rfloor x_j - \sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j,\end{aligned}$$

di conseguenza

## Piani di taglio di Gomory

### Dimostrazione (segue)

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j - \{\tilde{b}_r\} = \lfloor \tilde{b}_r \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \tilde{a}_{rj} \rfloor x_j - \tilde{x}_r \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Inoltre si ha:

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j - \{\tilde{b}_r\} \geq -\{\tilde{b}_r\} > -1. \quad (2)$$

Dalle relazioni (1) e (2), otteniamo che:

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{\tilde{b}_r\}. \quad (3)$$

quindi la (3) è una DV per  $\Omega$ . Inoltre la (3) non è soddisfatta da  $\bar{x}$ , infatti:

$$0 = \sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} \bar{x}_j < \{\tilde{b}_r\},$$

quindi la (3) è un piano di taglio. □

## Piani di taglio di Gomory

### Esempio

Consideriamo di nuovo il problema

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

Trasformiamo i vincoli di  $\leq$  in vincoli di  $=$  aggiungendo variabili di scarto  $x_3, x_4$ :

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 + x_3 = 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 + x_4 = 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 35 \end{pmatrix}, \quad c^T = (1 \ 3 \ 0 \ 0).$$

## Piani di taglio di Gomory

### Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo è  $\bar{x} = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0\right)$ .

Quindi la base ottima è  $B = \{1, 2\}$ ,

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} & \frac{5}{38} \\ \frac{4}{19} & -\frac{1}{38} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} & \frac{5}{38} \\ \frac{4}{19} & -\frac{1}{38} \end{pmatrix}.$$

Poiché  $\tilde{b} = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$  ha entrambe le componenti non intere, esistono due tagli di Gomory.

## Piani di taglio di Gomory

### Esempio

Se  $r = 1$ , allora il piano di taglio di Gomory è

$$\left\{ -\frac{1}{19} \right\} x_3 + \left\{ \frac{5}{38} \right\} x_4 \geq \left\{ \frac{7}{2} \right\},$$

cioè

$$\frac{18}{19}x_3 + \frac{5}{38}x_4 \geq \frac{1}{2},$$

ossia

$$36x_3 + 5x_4 \geq 19,$$

che nelle variabili  $(x_1, x_2)$  equivale a

$$36(21 - x_1 - 5x_2) + 5(35 - 8x_1 - 2x_2) \geq 19$$

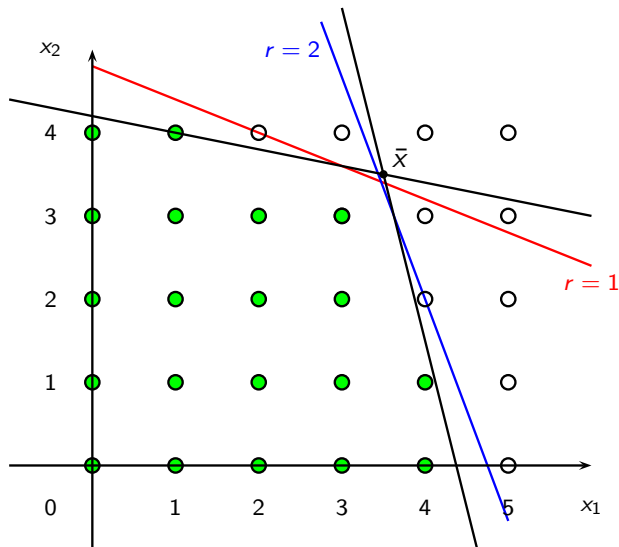
cioè

$$2x_1 + 5x_2 \leq 24.$$

Analogamente per  $r = 2$  si ottiene il piano di taglio  $8x_1 + 3x_2 \leq 38$ .

# Piani di taglio di Gomory

## Esempio



## Esercizio 1

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max & 12 x_1 + 5 x_2 \\ & 8 x_1 + 15 x_2 \leq 45 \\ & 15 x_1 + 11 x_2 \leq 63 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- a) Disegnare l'insieme  $\text{conv}(\Omega)$ , dove  $\Omega$  è la regione ammissibile del problema.
- b) Risolvere graficamente il rilassamento continuo del problema.
- c) Calcolare un taglio di Gomory.

## Esercizio 2

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min 6x_1 + 13x_2 \\ 17x_1 + 7x_2 \geq 63 \\ 7x_1 + 6x_2 \geq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- a) Disegnare l'insieme  $\text{conv}(\Omega)$ , dove  $\Omega$  è la regione ammissibile del problema.
- b) Risolvere graficamente il rilassamento continuo del problema.
- c) Calcolare un taglio di Gomory.